

# 以气流马赫数为自变量的 新型变比热气动函数

中国民航学院 彭 颖 范作民

## 摘 要

本文给出了以马赫数为自变量的新型变比热气动函数,并对现有的求解变比热热力过程的五类方法,即热力学法、两种常规的和两种新型的变比热气动函数法进行了比较。研究表明,在这五类方法中,采用以马赫数为自变量的新型变比热气动函数最为简便。

## 一、前 言

文献〔1〕给出了以马赫数为自变量的常规变成分气动函数和用 $\beta$ 系数表示的新型变成分气动函数。但是,文献〔1〕没有对新型变比热气动函数进行讨论,而变比热气动函数具有与变成分气动函数不同的许多特点。文献〔2〕给出了以速度系数为自变量的新型变比热气动函数,但是对于以气流马赫数 $Ma$ 为自变量的新型变比热气动函数以及两种新型变比热气动函数之间的比较,在文献〔2〕中未加研究。对于定比热气动函数,在大多数情况下,采用以速度系数为自变量的气动函数比较方便。然而对于变比热气动函数,情况有所不同。当采用以速度系数为自变量的变比热气动函数求解时,首先要确定临界点的参数,这需要额外增加一次热力过程的迭代运算。因此,对于这两种变比热气动函数的应用特点需要加以研究。实际上,对于变比热热力过程不同求解方法(“热力学方法”、两类常规变比热气动函数和两类新型变比热气动函数)的比较全面的评价还是一个有待研究的课题。本文的工作就是给出以马赫数为自变量的新型变比热气动函数,并对现有的五种变比热热力过程的求解方法进行比较全面的比较。

## 二、以气流马赫数 $Ma$ 为自变量的 新型变比热气动函数

这种新型变比热气动函数需要通过三个气动系数来表示,即对应于静温的定熵指数 $k$ 、能量方程的 $\beta$ 系数 $\beta_h$ 和定熵方程的 $\beta_\psi$ ,其定义分别为:

$$k = c_p / (c_p - R) \quad (1)$$

$$\beta_h = (kR/2)(T^* - T)/(h^* - h) \quad (2)$$

$$\beta_\psi = R \ln(T^*/T)/(\psi^* - \psi) \quad (3)$$

式中 $c_p$ 为定压比热容,  $h$ 为比焓,  $T$ 为温度,  $R$ 为比气体常数,  $\psi = \int_0^T (c_p/T) dT$  为比熵函数。

对于一定成分的气体,  $k$  值仅取决于  $T$ , 而  $\beta_h$  与  $\beta_s$  取决于  $T^*$  和  $T$ 。

用新型变比热气动函数表示的气体动力学基本方程为:

$$a = \sqrt{kRT} \quad (4)$$

$$T/T^* = \tau \quad (5)$$

$$p/p^* = \pi \quad (6)$$

$$q_m = p^* A q / \sqrt{RT^*} = p A y / \sqrt{RT^*} \quad (7)$$

$$I = q_m \sqrt{RT^*} Z = p A \Delta = p^* A f \quad (8)$$

式中  $a$  为音速,  $q_m$  为燃气质量流量,  $A$  为面积,  $p$  为压强,  $I$  为冲量, 变比热气动函数为:

$$\tau = 1/(1 + \beta_h Ma^2) \quad (9)$$

$$\pi = \tau^{1/\beta_s} \quad (10)$$

$$q = \sqrt{k} Ma \tau^{(1/\beta_s - 1/2)} \quad (11)$$

$$y = q/\pi = \sqrt{k/\tau} Ma \quad (12)$$

$$Z = \sqrt{\tau} \{ \sqrt{k} Ma + 1/(\sqrt{k} Ma) \} \quad (13)$$

$$\Delta = 1 + k Ma^2 = yz \quad (14)$$

$$f = \pi \Delta = qz \quad (15)$$

### 三、这种新型变比热气动函数的应用

该新型变比热气动函数有两方面的应用:

用以编制变比热气动函数表以减少变比热问题的计算量, 详见文献[1,2]。

用来对变比热问题直接求解。现以激波过程的计算为例加以说明。

例 1: 已知空气气流的  $T^* = 1000\text{k}$ , 正激波前气流的密流  $D = q_m/A = 250.00\text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$ , 气流的单位面积的冲量为  $F = I/A = 286557\text{KPa}$ , 求正激波波后的气流参数  $T_2$  和  $Ma_2$ 。

解: 由(8)式可得激波前的  $Z$  函数  $Z_1 = F/(D\sqrt{RT^*}) = 2.13940$ , 因为正激波前后的  $I$  和  $q_m$  分别相等, 即  $I_1 = I_2$ ,  $q_{m,1} = q_{m,2}$ , 故由(8)式又可得  $Z_1 = Z_2$ , 由(13)式得

$$\sqrt{\tau_2} (\sqrt{k_2} Ma_2 + 1/\sqrt{k_2} Ma_2) = Z_2 = Z_1$$

将(9)式之  $\tau$  代入上式, 解出  $Ma_2$  得

$$Ma_2^2 = [(Z_1^2 - 2) \pm \sqrt{(Z_1^2 - 2)^2 - (4/k_2)(k_2 - \beta_{h,2} Z_1^2)}] / [2(k_2 - \beta_{h,2} Z_1^2)] \quad (16)$$

(16) 式需迭代求解。求解步骤如下: 取一个温度初值  $T^*$ , 由(1)和(2)两式分别算出  $k$  和  $\beta_h$ , 再由(16)式求出  $Ma_2$  (对于亚音速流, 只要  $Ma$  不是极接近于 1, 例如  $Ma \leq 0.997$  左右, (2.1)式中根号前应取负号。关于(2.1)式中根号前符号的取法, 可以给出简单的判断方法, 本文从略), 然后由(9)式算出  $T$ , 再用此  $T$  值代替  $T^*$  重复计算。当温度初值取为  $T^* = 1000\text{k}$  时, 本例题的迭代过程如下:

| $T$ (K) | $k$     | $h$ (kJ/kg) | $\beta_h$ | $Ma$    |
|---------|---------|-------------|-----------|---------|
| 1000    | 1.33612 | 747.85      | 0.16806   | 0.55841 |
| 950.20  | 1.33999 | 691.30      | 0.16936   | 0.55745 |
| 950.00  | 1.34000 | 691.07      | 0.16937   | 0.55745 |

可以看到, 尽管初值距解较远, 但是第一次迭代结果就已经足够接近所求的解了。

#### 四、变比热问题不同求解方法的比较

##### 1. 热力学方法

作者对喷气发动机的常见热力过程分别采用热力学方法和以马赫数为自变量的新型变比热气动函数进行了计算比较。计算结果表明, 采用以马赫数为自变量的新型变比热气动函数的迭代过程的收敛速度比热力学方法的收敛速度快, 并且计算路线也比较简单。下面仍以激波过程的计算为例加以说明。对于热力学方法激波过程内计算可以归结为已知 $T^*$ 、 $D$ 和 $F$ (这三个量在正激波前后是不变的), 求解以下几个方程:

$$\text{广义状态方程: } h = h(T) \quad (17)$$

$$\text{能量方程: } h^* = h + V^2/2 \quad (18)$$

$$\text{连续方程: } D = \rho V \quad (19)$$

$$\text{状态方程: } p = \rho RT \quad (20)$$

$$\text{冲量方程: } F = DV + p \quad (21)$$

式中 $V$ 为气流速度,  $\rho$ 为密度。

具体求解步骤如下: 取两个温度初值 $T_1^*$ 和 $T_2^*$ , 相继由(17)至(20)式求出 $h$ 、 $v$ 、 $\rho$ 和 $p$ , 然后对(21)式用双点弦割法进行迭代。对于例1所给出的数据, 取两个温度初值分别为990k和989k, 迭代过程如下:

| n | T<br>K | h<br>KJ/kg | V<br>m/s | $\rho$<br>kg/m <sup>3</sup> | P<br>kPa | (DV + P - F)<br>kPa |
|---|--------|------------|----------|-----------------------------|----------|---------------------|
| 1 | 990    | 736.42     | 151.22   | 1.6532                      | 468.91   | 221.06              |
| 2 | 989    | 735.29     | 158.52   | 1.5771                      | 447.73   | 200.80              |
| 3 | 979.09 | 724.04     | 218.21   | 1.1457                      | 321.99   | 89.99               |
| 4 | 971.04 | 714.90     | 256.71   | 0.9739                      | 271.45   | 49.07               |
| 5 | 961.38 | 703.94     | 296.35   | 0.8436                      | 232.80   | 20.33               |
| 6 | 954.55 | 696.22     | 321.35   | 0.7780                      | 213.17   | 6.95                |
| 7 | 951.01 | 692.22     | 333.57   | 0.7495                      | 204.60   | 1.43                |
| 8 | 950.09 | 691.18     | 336.68   | 0.7426                      | 202.51   | 0.13                |
| 9 | 950.00 | 691.07     | 336.98   | 0.7419                      | 202.31   | 0                   |

与例1比较可知, 热力学方法的收敛速度要慢得多。

以上比较是就热力过程的直接求解而言的, 如果利用变比热气动函数表进行计算, 新型变比热气动函数也具有突出的优点, 这一点在文献[1,2]中早已指出了。

##### 2. 以速度系数为自变量的新型变比热气动函数

以速度系数为自变量的新型变比热气动函数已在文献[2]中给出。两类新型变比热气动函数之间的主要差别之一是, 当以速度系数为自变量时, 首先要求出临界温度 $T_{cr}$ , 即要多进行一个迭代运算。因此, 当用计算机进行计算时, 以速度系数为自变量不如以马赫数为自变量方便。但是当利用变比热气动函数表进行计算时, 临界温度 $T_{cr}$ 可以由气动函数表直接给出, 因而上述差别对于实际计算不再有影响。这时, 两类新型变比热气动函数之间的另一差别将

发生作用。对于以速度系数为自变量的气动函数,随气流静温变化的气动系数只有两个,即 $\alpha_h$ 和 $\alpha_s$ ,而对于以马赫数为自变量的气动函数,随气流静温变化的气动系数将是三个,即 $k$ 、 $\beta_h$ 和 $\beta_s$ 。由于热力过程的计算通常都是在气流总温为已知的条件下进行的,因此在用气动函数表进行计算时,以速度系数为自变量有一定的优点。

### 3. 以马赫数为自变量的常规变比热气动函数

为节省篇幅,仅对 $\tau$ 、 $\pi$ 和 $q$ 这三个气动函数进行讨论。这三个气动函数分别为

$$\tau = 1 / [1 + (k_h - 1) Ma^2 / 2] \quad (22)$$

$$\pi = [1 + k_h - 1) Ma^2 / 2]^{k_s / (1 - k_s)} \quad (23)$$

$$q = \sqrt{(k/k_{cr}) [(k_{h, cr} + 1) / 2] (k_{s, cr} + 1) / (k_{s, cr} - 1) Ma [1 + (k_h - 1) Ma^2 / 2]^{(1 + k_s) / 2 (1 - k_s)}} \quad (24)$$

$$\text{式中 } k_h = 1 + k(k_m - 1) / k_m \quad (25)$$

$$k_s = (\psi^* - \psi) / [\psi^* - \psi - R \ln(T^* / T)] \quad (26)$$

$$k_m = C_{p, m} / (C_{p, m} - R) \quad (27)$$

$$C_{p, m} = (h^* - h) / (T^* - T) \quad (28)$$

式中下标 $cr$ 表示静参数按临界参数计算。

可以看到,常规变比热气动函数比新型变比热气动函数复杂。

### 4. 以速度系数为自变量的常规变比热气动函数

以速度系数为自变量的常规变比热气动函数数的 $\tau$ 、 $\pi$ 和 $q$ 三个气动函数分别为:

$$\tau = 1 - [k_{cr}(k_m - 1) / (2k_m)] \lambda^2 / [1 + (k_{cr} / k_{m, cr})(k_{m, cr} - 1) / 2] \quad (29)$$

$$\pi = \{1 - [k_{cr}(k_m - 1) / (2k_m)] \lambda^2 / [1 + (k_{cr} / k_{m, cr})(k_{m, cr} - 1) / 2]\}^{k_s / (k_s - 1)} \quad (30)$$

$$q = [1 + k_{cr}(k_{m, cr} - 1) / (2k_{m, cr})]^{1 / (k_{s, cr} - 1)} \lambda \{1 - [k_{cr}(k_m - 1) / (2k_m)] \lambda^2 / [1 + (k_{cr} / k_{m, cr})(k_{m, cr} - 1) / 2]\}^{1 / (k_s - 1)} \quad (31)$$

式中 $k_m$ 、 $k_{m, cr}$ 和 $k_{s, cr}$ 等值由(27)和(26)式确定。

可以看到,以速度系数为自变量的常规变比热气动函数是相当复杂的。

常规变比热气动函数的构造原则是一律通过各种平均定熵指数来表示气动函数,这一原则给气动函数增加了许多不必要的计算量。新型变比热气动函数的构造原则是摆脱平均定熵指数的束缚,直接按照最简单的计算路线来构造气动函数。新型变比热气动函数的构造原则决定了它的计算量要少于常规变比热气动函数的计算量。

本文提出的以马赫数为自变量的新型变比热气动函数是求解变比热问题的一种新方法。这种方法的优点是求解路线简单、收敛速度快,特别适合于熟悉定比热气动函数的人使用。

### 参 考 文 献

- [1] 范作民、傅翼权,“热力过程计算与燃气表”,上卷,国防工业出版社,1987年。
- [2] 范作民、傅翼权,“一种新型的变比热气动函数”,航空学报, Vol.9, No.7, 1988年。

## ADJUSTMENT OF RATIO OF ROTATION SPEED DIFFERENCE IN A TWIN-SPOOL TURBOJET ENGINE

Wu Zizhong and Shang Yi (*Nanjing Aeronautical Institute*)

Analyzing the concept and the function of the ratio of rotation speed difference in a twin-spool turbojet engine indicates that the ratio has an effect on the surge margins of the high and low pressure compressors and the match between the speed of high pressure compressor and the inlet gas temperature. It is proposed how to adjust the ratio of rotation speed difference reasonably. The results of the adjustments made by us are shown in good agreement with the trial run data. In addition, the effects of the ratio on the thrust, specific fuel consumption, speed of high pressure compressor and turbine inlet gas temperature are also considered.

## NEW GASDYNAMICS FUNCTIONS WITH VARIABLE SPECIFIC HEAT TAKING MACH NUMBER AS INDEPENDENT VARIABLE

Peng Ying and Fan Zuomi (*Civil Aviation Institute of China*)

The new gasdynamics functions with variable specific heat proposed in this paper take Mach number as independent variable. The four existing methods, namely the thermodynamics method, two kinds of conventional gasdynamics functions with variable specific heat and another kind of new gasdynamics functions with variable specific heat are compared with the presented method in solving thermo dynamic processes with variable specific heat. It is shown that the proposed new method is the most convenient.

## A NEW ADJUSTING SCHEME OF MULTI-POINT EXCITING PURE MDDE

Yi Liyan and Zhang Yison (*Nanjing Aeronautical Institute*)

A new technique of multi-point exciting for modal testing is discussed. In consideration of the trouble of phase shift in some experimental instruments, a new scheme is proposed to assign multi-point exciting forces and a practical method is provided to discern the modal parameters in pure modes. Calculations and experiments demonstrate that the new technique is applicable to the multi-point exciting experiments for general structures.